MA1 – přednáška 16. 12. 2019 (první část)

Lineární diferenciální rovnice (obyčejné) 1. řádu

Lineární (obyčejná) diferenciální rovnice 1. řádu je rovnice

$$(1) \qquad y' + p(x)y = f(x),$$

kde $p(x), f(x)$ jsou funkce, definované v intervalu $(a,b) \subset R$ a $y = y(x)$ je funkce neznámá, která má derivaci $y'(x)$, $x \in (a,b)$.

Cauchyho (počáteční) úloha pro rovnici (1) je úloha najít takové řešení $y = y(x)$, $x \in (a,b)$, pro které platí

$$(2) \qquad y(x_0) = y_0, \qquad x_0 \in (a,b),\ y_0 \in R.$$

(tj. $y(x)$ splňuje počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$)

Platí

Věta (o existenci a jednoznačnosti řešení (1), (2))

Jsou-li funkce $p(x), f(x)$ spojité v (a,b) (značíme $p, f \in C(a,b)$), $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in R$, pak lineární diferenciální rovnice

$$y' + p(x)y = f(x)$$

má jediné řešení $y(x) \in C^{(1)}(a,b)$, které splňuje počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

Poznámka: Název „lineární" rovnice souvisí s vlastnostmi zobrazení $y \in C^{(1)}(a,b) \longrightarrow y' + p(x)y \in C(a,b)$:

(lineární diferenciální operátor je obvyklý název tohoto zobrazení: $D(y) = y' + p(x)y$)

1) $y_1, y_2 \in C^{(1)}(a,b)$, pak $D(y_1 + y_2) = D(y_1) + D(y_2)$

2) $c \in R$, $y \in C^{(1)}(a,b)$, pak $D(cy) = cD(y)$

Jak najdeme řešení rovnice

$$(1) \qquad y' + p(x)y = f(x) \ , \ x \in (a,b)$$

za předpokladu $p, f \in C(a,b)$ (a počáteční úlohy pro rovnici (1)) ?

1) Řešíme 1. ř. homogenní rovnici (rovnici bez pravé strany), příslušnou k rovnici (1) („místo" $f(x)$ je na pravé straně rovnice funkce nulová) :

$$(2) \qquad y' + p(x)y = 0 \quad , (tj. \text{ separace })$$

$$y' = -p(x)y \ , \ x \in (a,b)$$

a zde je hned stacionární řešení $y(x) = 0, x \in (a,b)$ -- (i)
nebo separací máme

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \ ,$$

a $\ln|y(x)| = -P(x) + C$ ($P(x)$ je primitivní fce k $p(x)$ v (a,b))

a pak $y(x) = \tilde{K} e^{-P(x)}, \tilde{K} \neq 0, x \in (a,b)$ .. (ii)

Z (i) a (ii) pak dostaneme obecné řešení homogenní rovnice

$$\underline{y_H(x) = K e^{-P(x)} \ , \ K \in \mathbb{R}, x \in (a,b)}$$

($K = \tilde{K}$ pro $y(x) \neq 0$, $K = 0$ pro $y(x) = 0$ (stacionární řeš.))

2) Řešení nehomogenní rovnice (s pravou stranou $f(x)$) <u>dostaneme metodou „variace konstant"</u> :

řešení hledáme ve tvaru

$$\underline{y(x) = K(x) e^{-P(x)} \ , \ x \in (a,b)} \ ; \text{ tedy}$$

hledáme <u>$K(x) \in C^1(a,b)$</u> ! Jak ?

Funkci $K(x)$ musíme najít tak, aby $y(x) = K(x)e^{-P(x)}$ bylo řešení rovnice (1), tj. aby platilo v (a,b)

$$\left(K(x)e^{-P(x)}\right)' + p(x)K(x)e^{-P(x)} = f(x), \quad x \in (a,b)$$

A provedeme-li derivaci, dostaneme:

$$K'(x)e^{-P(x)} + K(x)e^{-P(x)}\cdot(-P(x))' + p(x)K(x)e^{-P(x)} = f(x)$$

a protože je $P'(x) = p(x)$ v (a,b), máme pro $K(x)$ rovnici

$$K'(x)e^{-P(x)} = f(x),$$

tj.

$$K'(x) = f(x)e^{P(x)}$$

a pak v (a,b): $K(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx = \phi(x) + C$

(funkce $f(x)e^{P(x)}$ má v (a,b) primitivní funkci, neboť je zde spojitá)

Pak tedy dostaneme: $y(x) = (\phi(x) + C)e^{-P(x)}, \ x \in (a,b), \ C \in R$ (*)

3) Řešení počáteční úlohy: $y(x_0) = y_0, \ x_0 \in (a,b), y_0 \in R$?

Hledáme konstantu $C \in R$ v (*) tak, aby $y(x_0) = y_0$, tj.

$$y_0 = (\phi(x_0) + C)e^{-P(x_0)}$$

a odtud dostaneme, že $C = \left(y_0 - \phi(x_0)e^{-P(x_0)}\right)\cdot e^{P(x_0)} =$

$$= y_0 e^{P(x_0)} - \phi(x_0)$$

a tedy $y_{pč}(x) = y_0 e^{-(P(x)-P(x_0))} + (\phi(x) - \phi(x_0))e^{-P(x)}, \ x \in (a,b)$

Tedy, protože jsme našli metodou variace konstant jediné řešení počáteční úlohy pro rovnici (1), z věty o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy pak plyne, že metodou variace konstant jsme „našli" všechna řešení (1).

Řešení (*) $y(x) = (\phi(x) + c)e^{-P(x)}$ se nazývá obecné řešení rovnice (1) (a značí často $y_{OB}(x)$).

Poznámka:

Řešení $y_{OB}(x) = (\phi(x) + c)e^{-P(x)}$ lze psát ve tvaru

$$y_{OB}(x) = c\,e^{-P(x)} + \phi(x)e^{-P(x)}, \quad x \in (a,b),\ c \in R;$$

Vidíme, že $c\,e^{-P(x)} = y_H(x)$ je řešení rovnice homogenní,

a $\phi(x)e^{-P(x)}$ je jedno z řešení rovnice nehomogenní ($c=0$) – nazývá se partikulární řešení nehomogenní rovnice) a značí obvykle

$$y_P(x) = \phi(x)e^{-P(x)}$$

Potom lze psát $y_{OB}(x) = y_H(x) + y_P(x)$, $x \in (a,b)$

(a někdy lze řešení $y_P(x)$ najít i jinak, než variací konstant, t.zv. odhadem – ukážeme si)

Příklad 1: $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

Zde $p(x) = 2x$, $f(x) = 2xe^{-x^2}$ jsou funkce spojité v R, tedy rovnice má řešení jedné jedno pro lib. počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, $x_0, y_0 \in R$.

1) řešení homogenní rovnice $y' + 2xy = 0$:

(i) $y(x) \equiv 0$, $x \in R$ stacionární řešení;

(ii) $y(x) = \tilde{K}.e^{-x^2}$, $\tilde{K} \neq 0$, $x \in R$ je řešení pro $y(x) \neq 0$ v R

a odtud: $y_H = Ke^{-x^2}$, $K \in R$, $x \in R$

2) variace konstant :
hledáme řešení $y_p(x)$ ve tvaru $y_p(x) = K(x)e^{-x^2}$, $x \in R$;
pro hledanou funkci $K(x)$ dostaneme (zjednodušení) diferenciální rovnici dosazením do dané diferenciální rovnice :

$$\left(K(x)e^{-x^2}\right)' + 2x\,K(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2} \text{, tj.}$$

$$K'(x)e^{-x^2} + K(x)e^{-x^2}(-2x) + 2x\,K(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2} \text{, } x \in R$$

a odtud : $K'(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$, tedy

$$\underline{K'(x) = 2x \Rightarrow K(x) = x^2 + C \text{, } x \in R, C \in R}$$

a pak $y_{OB}(x) = (x^2 + C)e^{-x^2}$, $x \in R$, $C \in R$

nebo též takto : $\underline{y_{OB}(x) = Ce^{-x^2} + x^2e^{-x^2} \quad (= y_H(x) + y_p(x))}$, $x \in R$, $C \in R$ (*)

3) řešení počáteční úlohy : máme najít řešení dané rovnice, které splňuje počáteční podmínku $y(0) = 3$ (víme, že je jediné) – hledáme tedy konstantu C ve (*):

$y(0) = 3$: $\quad 3 = Ce^0 + 0e^0 \Rightarrow C = 3$

a $\quad \underline{y_{poč}(x) = (3 + x^2)e^{-x^2} \text{, } x \in R}$

Příklad 2 : $\quad \underline{y' + \frac{1-2x}{x^2}\,y = 1}$, $x \in (-\infty, 0) \vee x \in (0, +\infty)$

a) řešení homogenní rovnice $\quad y' + \frac{1-2x}{x^2}\,y = 0$

(i) stacionární řešení : $y(x) = 0$, $x \in (-\infty, 0) \vee x \in (0, +\infty)$

(ii) „separace" pro $y(x) \neq 0$:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x-1}{x^2}\,dx$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \frac{1}{x} + c \text{, } c \in R \text{, } x \in (-\infty, 0) \vee x \in (0, +\infty)$$

a tedy zde $\quad y(x) = Kx^2e^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$, $K \neq 0$

tedy, $\underline{y_H(x) = K x^2 e^{\frac{1}{x}}, \; x \neq 0, \; K \in R}$

b) <u>variace konstant</u>:

$$y(x) = K(x) x^2 e^{\frac{1}{x}}, \quad x \neq 0, \text{ pak}$$

$$\left(K(x) x^2 e^{\frac{1}{x}} \right)' + \frac{1-2x}{x^2} \cdot K(x) \cdot x^2 e^{\frac{1}{x}} = 1$$

a $$K'(x) x^2 e^{\frac{1}{x}} + K(x) \left(2x e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} \right) + \frac{1-2x}{x^2} K(x) x^2 e^{\frac{1}{x}} = 1$$

a tedy $$K'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

a pak $$K(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx = e^{-\frac{1}{x}} + C, \; C \in R$$

a (*) $$y_{ob}(x) = \left(C + e^{-\frac{1}{x}} \right) x^2 e^{\frac{1}{x}}, \quad x \in (-\infty, 0) \vee x \in (0, +\infty), \; C \in R$$

(nebo) $\underline{y_{ob}(x) = C x^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2}$, — " —

c) <u>počáteční úloha</u>: najít řešení, které splňuje podmínku

(i) $y(1) = 0$: $(x = 1, y = 0)$ – dosazením do (*):

$$0 = Ce + 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{e}$$

a $\underline{y_{pč}(x) = x^2 \left(1 - e^{\frac{1}{x} - 1} \right), \quad x \in (0, +\infty)}$

(ii) $y(-1) = 2$: $2 = Ce^{-1} + 1 \Rightarrow \underline{C = e}$

a $\underline{y_{pč}(x) = x^2 \left(1 + e^{\frac{1}{x} + 1} \right), \quad x \in (-\infty, 0)}$

! Poznámka: k řešení diferenciální rovnice vždy „patří" interval, kde je nalezená funkce $y(x)$ řešení – zde je interval dán „počáteční" podmínkou: $y(1) = 0 \rightarrow x \in (0, +\infty)$; $y(-1) = 2 \rightarrow x \in (-\infty, 0)$

<u>Příklad 3</u> – <u>„odhad" partikulárního řešení</u>

a) $\underline{y' - 2y = x+1 \quad , \quad y(0) = -1}$

(i) $y_H(x) = Ke^{2x}$, $K \in R$, $x \in R$

(ii) $y_p(x)$: odhad – $y_p(x)$ „musí" být polynom
(z „jiné" funkce diferenciální operátor
$D(y) = y' - 2y$ „neudělá" polynom)
a zřejmě $\underline{y_p(x) = Ax + B}$ – stačí „najít koeficienty
polynomu A, B – jak? opět – $y_p(x) = Ax + B$ má
být řešením dané diferenciální rovnice, tedy má
platit

$$(Ax+B)' - 2(Ax+B) = x+1 \quad , \text{tj.}$$
$$-2Ax + (A-2B) = x+1 \quad , \text{pro } x \in R,$$

a tedy (stejně jako u rozkladu racionální funkce
na parciální zlomky) máme pro A, B soustavu
rovnic :
$$-2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$
$$A - 2B = 1 \Rightarrow B = -\frac{3}{4} \;;$$

tedy: $\underline{y_p(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \quad \text{a} \quad y_{oa}(x) = Ke^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}}$

<u>Řešení počáteční úlohy:</u>

Z počáteční podmínky $y(0) = -1$ dostáváme rovnici pro K:
$$K - \frac{3}{4} = -1 \Rightarrow K = -\frac{1}{4}$$

a pak $\quad y_{poč}(x) = -\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \,, \quad x \in R$

Zřejmě lze partikulární řešení najít odhadem podobně jako v uvedeném příkladu, když lineární diferenciální rovnice bude mít $p(x)$ konstantní, tj.

$$y' + py = f(x)\ ,\ p \in R$$

a $f(x)$ bude ještě obsahovat exponenciálu, nebo též kombinaci sinu a cosinu:

Např.:

$$y' + py = 3e^{ax} \rightarrow y_p(x) = Ae^{ax}\ ,\ A = ?$$

$$y' + py = \sin 2x - \cos 2x \rightarrow y_p(x) = A\sin 2x + B\cos 2x\ ,\ A, B = ?$$

$$y' + py = xe^{-x} \rightarrow y_p(x) = (Ax + B)\, e^{-x}\ ,\ A, B = ?$$

$$y' + py = \cos bx \rightarrow y_p(x) = A\cos bx + \underline{B\sin bx}\,!\ ,\ A, B = ?$$

Asi obecně lze odhadem $y_p(x)$ určit pro

$$\underline{f(x) = e^{ax}(a(x)\sin bx + b(x)\cos bx)}\ ,\ a, b \in R \text{ a } a(x), b(x) \text{ jsou polynomy}$$

pak odhad pro $y_p(x)$ je

$$\underline{y_p(x) = e^{ax}(A(x)\sin bx + B(x)\cos b(x))}\ ,$$

kde $A(x), B(x)$ jsou polynomy takové, že stupeň $A(x)$ = stupeň $B(x)$ = $\max(\mathrm{st}\, a(x), \mathrm{st}(b(x)))$, pokud $p \neq 0$ (jinak, pro $p = 0$ je úloha jen vyřešit primitivní funkce z $f(x)$).
Koeficienty hledaných polynomů určíme dosazením předpokládaného tvaru řešení do dané rovnice a srovnáním koeficientů u polynomů, pokud $f(x)$ obsahuje i fce sin a cos, pak se rovnají i výrazy, které „jsou" u fce $\sin bx$, resp. u fce $\cos bx$.

b) $y' - 2y = \sin x \ , \ x \in R$

odhad: $y_p(x) = A\sin x + B\cos x$, pak A, B hledáme

z rovnice $(A\sin x + B\cos x)' - 2(A\sin x + B\cos x) = \sin x$,

tj. $A\cos x - B\sin x - 2(A\sin x + B\cos x) = \sin x$,

a srovnáním

u $\sin x$: $\quad -2A - B = 1 \Rightarrow -5B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{5}$

u $\cos x$: $\quad A - 2B = 0 \Rightarrow A = 2B \Rightarrow A = -\frac{2}{5}$

a tedy $y_p(x) = -\frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x, \ x \in R$

c) $y' - 2y = xe^{-x} \ , \ x \in R$

odhad $y_p(x)$: $\quad y_p(x) = (Ax + B)e^{-x} \ , \ x \in R$

a dosazením do rovnice máme

$$((Ax+B)e^{-x})' - 2(Ax+B)e^{-x} = xe^{-x} \ , \text{ tj.}$$

$$Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x} - 2(Ax+B)e^{-x} = xe^{-x}$$

tedy: $\quad -3Ax + (A - 3B) = x$, tj. $\quad -3A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$

$A - 3B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{9}$

a tedy $y_p(x) = -\frac{1}{9}(3x+1)e^{-x}, \ x \in R$

A na závěr – dva fyzikální „modely“:

1. Řešení rovnice, popisující usazování částice hmotnosti m v emulsi:

$$\frac{d}{dt}(mv) = mg - kv \qquad (\times\ 2.\ \text{Newtona zákona})$$

(g – gravitační zrychlení, $v(t)$ – rychlost částice, $k>0$ konstanta).

Je-li m konstantní, dostaneme rovnici (s počáteční podmínkou)

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g \ , \quad v(0) = v_0$$

Řešení: 1) $v_H(t) = K e^{-\frac{k}{m}t}$, $K \in R$, $t \geq 0$

2) variace konstant: $v(t) = K(t) e^{-\frac{k}{m}t}$ a pak

$$K'(t) e^{-\frac{k}{m}t} + K(t) e^{-\frac{k}{m}t}\left(-\frac{k}{m}\right) + \frac{k}{m} K(t) e^{-\frac{k}{m}t} = g \ ,$$

tedy pro $K(t)$ máme rovnici $K'(t) = g e^{\frac{k}{m}t}$,

a tedy $K(t) = g\frac{m}{k} \cdot e^{\frac{k}{m}t} + c$, $c \in R$

a obecné řešení je

$$v_{OB}(t) = c\, e^{-\frac{k}{m}t} + g\frac{m}{k} \quad , t \geq 0 \qquad (*)$$

Řešení počáteční úlohy s $v(0) = v_0$:

z (*) dostaneme $c = v_0 - g\frac{m}{k}$, a pak

$$v_{poč}(t) = \left(v_0 - g\frac{m}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} + g\frac{m}{k} \ , \text{ a po úpravě}$$

$$v_{poč}(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} + g\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) , \quad t \geq 0 .$$

Odtud vidíme, že $\lim_{t\to\infty} v_{poč}(t) = g\frac{m}{k}$ („limitní pohyb“ – „rovnoměrný“, $v_{lim} = g\frac{m}{k}$)

2. Newtonův ochlazovací zákon:

Těleso teploty T_0 je umístěno do prostředí teploty $T_v < T_0$, pak pro teplotu $T(t)$ platí:

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_v)\,, \quad T(0) = T_0$$

(tedy opět lineární diferenciální rovnice

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_v\,, \quad T(0) = T_0\ )$$

Rovnici můžeme řešit pomocí "separace":

pro $T > T_v$:

$$\int \frac{dT}{T - T_v} = -k \int dt$$

$$\ln|T - T_v| = -kt + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

a pak

$$T(t) = T_v + K e^{-kt}\,, \quad K > 0\,, \quad t \geq 0$$

a opět vidíme, že $\lim\limits_{t \to \infty} T(t) = T_v$

Řešení počáteční úlohy $T(0) = T_0$:

$$T_0 = T_v + K \Rightarrow K = T_0 - T_v\,,$$

tj.

$$T_{\text{pč}}(t) = T_v + (T_0 - T_v)\,e^{-kt}\,, \quad t \geq 0$$